ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **04 de fevereiro de 2015**

Exercício 1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto não limitado. Sem usar o Teorema de Heine–Borel, mostre que A não é compacto.

Exercício 2. Decida se os conjuntos abaixo são ou não compactos. Prove suas afirmativas sem utilizar o Teorema de Heine–Borel.
(a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A finito.
(b) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que B não contém ao menos um de seus pontos de acumulação.

Exercício 3. Sem usar o Teorema de Bolzano–Weiertrass no $\mathbb{R}^n$, mostre que se K é compacto e $A \subseteq K$ é infinito, então existe pelo menos um ponto de acumulação de A. Obtenha como corolário o Teorema de Bolzano–Weiertrass. Este ponto de acumulação necessariamente pertence a A? Necessariamente pertence a K?

Exercício 4. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ é compacto.

Exercício 5. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$, e $d_k = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|$. Decida se a afirmativa

$$\text{“Se } \lim_{k\to\infty} d_k = 0, \text{então } (\mathbf{x}_k) \text{ converge”}$$

é verdadeira ou não. Se for verdadeira, demonstre-a. Caso contrário, apresente um contra-exemplo.

Exercício 6. Seja a_j sequência de números reais, e sejam as sequências

$$b_n = \sum_{j=1}^n a_j, \qquad c_n = \sum_{j=1}^n |a_j|.$$

Mostre que se (c_n) converge, então (b_n) converge.