ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **2? de março de 2014**

Exercício 1. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)+x^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ iguais a zero, mas que f não é diferenciável no $(0,0)$.

Exercício 2. Seja $Q = (0,1) \times (0,1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{g}'(x)$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.

Exercício 3. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ função contínua em B, diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B. Mostre que f tem ponto crítico no interior de B.

Exercício 4. Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$a\sum_{i=1}^n x_i^4 + b\sum_{i=1}^n x_i^3 + c\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^3 + b\sum_{i=1}^n x_i^2 + c\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercício 5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sejam funções uniformemente contínuas. Mostre que se (f_i) converge uniformemente para f, então f é uniformemente contínua.

Exercício 6. Seja $\mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ o espaço das funções de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, contínuas e limitadas. Mostre que $\mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ é completo na norma do supremo $\|\cdot\|_{\sup,\Omega}$, i.e., uma sequência (f_i) em $\mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ é de Cauchy se e somente se existe $f \in \mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ tal que $\|f_i - f\|_{\sup,\Omega} \to 0$.