ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **12 de março de 2014**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e $f(\mathbf{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ tal que f seja estritamente positiva.

Exercício 2. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 3. Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua, e seja $\big(\mathbf{x}_j\big)$ sequência contida em K. Mostre que a sequência $\big(f(\mathbf{x}_j)\big)$ possui subsequência convergente com limite contido em $f(K)$.

Exercício 4. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Mostre que f é contínua em Ω se e somente se $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ são abertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 5. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ fechado e limitado, e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua em Ω. Sem usar Heine–Borel, mostre que $f(\Omega)$ é fechado e limitado.

Exercício 6. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^m$ limitado, e $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que $\boldsymbol{f}$ é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.