ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **27 de janeiro de 2014**

Exercício 1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f+g : A \to \mathbb{R}$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f+g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Exercício 2. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}.$$

Mostre que f está bem definida. Construa entretanto um exemplo onde não exista $\mathbf{y} \in A$ tal que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 3. Mostre que se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ são abertos em $\mathbb{R}$, então o conjunto $C = A \times B$ é aberto no $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, fechado e limitado. Mostre que $\sup I \in I$.

Exercício 5. Apresente um exemplo para cada uma das situações abaixo:

(a) Um conjunto fechado, não vazio, e sem pontos de acumulação. Por que isto não contradiz o Teorema das celas encaixantes (Teorema 2.4.1)?
(b) Um conjunto não enumerável, tal que todo ponto dele é ponto de fronteira
(c) Um conjunto não fechado que seja união de fechados

Exercício 6. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chamamos de *fecho de A*, e denotamos por $\bar{A}$, a interseção de todos os fechados que contenham A. Mostre que $\mathbf{x} \in \bar{A}$ se e somente se $\mathbf{x}$ é ponto de interior ou de fronteira da A.

Exercício 7. Sejam A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x}$ ponto de acumulação de $A \cap B$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de A e de B.

Exercício 8. Mostre sem usar o Teorema de Heine–Borel que $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ é compacto.