ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **13 de março de 2013**

Exercício 1. Demonstre o Lema 4.1.1.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) = 0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^m$.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é limitada.

Exercício 4. Sejam $a < b$ números reais e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$. Suponha que nenhum ponto interior é extremo local. Mostre que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Exercício 5 (Equivalência de normas no $\mathbb{R}^n$). Dizemos que duas normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ de uma espaço vetorial V são *equivalentes* se existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$c_1|||\mathbf{v}||| \le \|\mathbf{v}\| \le c_2|||\mathbf{v}|||$$

para todo $v \in V$. Mostre que no $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes.

(Dica: mostre que todas as normas são equivalentes à norma euclidiana, i.e., considere $\|\cdot\|$ como sendo a norma euclidiana. Para tal, comece mostrando que existe constante c_1 tal que $c_1|||\mathbf{v}||| \le \|\mathbf{v}\|$ para todo $v \in V$. Para obter a desigualdade inversa, mostre que $|||\cdot|||$ define uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Conclua então usando o Teorema dos pontos extremos de forma apropriada.)

Exercício 6. Suponha $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0,1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que f seja uniformemente contínua em $[0,1]$.