ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **05 de fevereiro de 2013**

Exercício 1. Mostre que uma sequência $(\mathbf{x}_k)$ em $\mathbb{R}^n$ converge se e somente se a sequência das i-ésimas coordenadas $\big((x_i)_k\big)$ converge em $\mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$.

Exercício 2. Ache uma sequência (x_n) de números reais tal que todos os pontos de $[0, 1]$ sejam limites de alguma subsequência de (x_n). Esboce o motivo de seu exemplo estar correto.

Exercício 3. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$, e $d_k = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|$. Decida se a afirmativa

$$\text{“Se } \lim_{k\to\infty} d_k = 0, \text{então } (\mathbf{x}_k) \text{ converge”}$$

é verdadeira ou não. Se for verdadeira, demonstre-a. Caso contrário, apresente um contra-exemplo.

Exercício 4. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência convergente de pontos distintos em $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de $S = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dê um exemplo de uma sequência convergente cujo limite não é ponto de acumulação de S.

Exercício 5. Sem usar o Teorema de Heine–Borel, mostre que se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto, então K é sequencialmente compacto, i.e., toda sequência contida em K possui subsequência convergente com limite contido em K.

Exercício 6. Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = (2 + x_n)^{1/2}$. Mostre que x_n converge, e ache seu limite.