ANÁLISE I – FGV
PRIMEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **31 de janeiro de 2013**

Exercício 1. Usando indução demonstre a *desigualdade de Cauchy*,

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$$

Com a_i e b_i números reais para todo i.

Exercício 2. Dado um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, definimos P° como o conjunto dos pontos interiores de P. Prove ou dê um contra-exemplo para a afirmativa abaixo:

$$\mathcal{C}\left(P^\circ\right) = \left(\mathcal{C}\left(P\right)\right)^\circ.$$

Exercício 3. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto finito, mostre que F é fechado.

Exercício 4.
(1) Exiba um subconjunto limitado dos reais com exatamente 3 pontos de acumulação.
(2) Exiba um subconjunto limitado dos reais cujo conjunto dos pontos de acumulação seja infinito e enumerável.
(3) Exiba um subconjunto dos reais enumerável que tenha como pontos de acumulação o intervalo $[0, 1]$.
(4) Existe algum conjunto que tenha $(0, 1)$ como conjunto de pontos de acumulação? Dê um exemplo ou mostre que isto é impossível.

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $\mathcal{G}$ uma cobertura de A, mostre que existe uma subcobertura enumerável de A.

Exercício 6. Mostre que se K é compacto e $A \subseteq K$ é infinito, então existe pelo menos um ponto de acumulação de A. Obtenha como corolário o Teorema de Bolzano–Weiertrass.