ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **23 de março de 2010**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de f. Mostre que é único.

Exercício 2. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se f' é positiva em I, i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.

Exercício 3. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existe uma constante c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para h suficientemente pequeno. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 4. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em A, com a segunda derivada contínua, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto. Mostre que cada compacto contido em A contém um número finito de pontos críticos não degenerados.

Exercício 5. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y - x^2) + x^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ iguais a zero, mas que f não é diferenciável no $(0,0)$. (Dica: considere $\mathbf{h} = (s, s^2)$, s nmero real).

Exercício 6. Seja $Q = (0,1) \times (0,1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{g}'(x)$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.

Exercício 7. Mostre, usando o Teorema 5.4.3, que $(0,0)$ é ponto de sela de $f(x,y) = x^2 - y^2$, e ponto de mínimo estrito local de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 8. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega$. Seja $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Supondo que $\mathbf{x}$ não é ponto crítico de f, mostre que a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ atinge seu máximo quando $\mathbf{u} = c\nabla f(\mathbf{x})$ para algum $c > 0$. O vetor ∇f é chamado de *vetor gradiente de* f, e dá a direção de "maior crescimento" da função f no ponto $\mathbf{x}$.