ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
SEGUNDA PROVA

Prof. Alexandre Madureira

Data: **3 de junho de 2002**

Tempo de prova: **2 horas**

1- Mostre que se A é uma matrix $n \times n$, com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, então $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$.
Solução: *O polinômio característico*

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

Tomando $\lambda = 0$ *temos então que*

$$\det(A - \lambda I) = \lambda_1 \dots \lambda_n,$$

2- Mostre que se λ é autovalor de A, então λ^k é autovalor de A^k. Mostre também que λ^{-1} é autovalor de A^{-1}.

Solução: *Para* $k = 1$ *o resultado é óbvio. Suponha então que*

$$A^{k-1}\mathbf{x} = \lambda^{k-1}\mathbf{x}.$$

Então

$$A^k\mathbf{x} = AA^{k-1}\mathbf{x} = A\lambda^{k-1}\mathbf{x} = \lambda^{k-1}A\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}.$$

Para provar o reusltado sobre o autovalores de A^{-1} *precisamos supor que* A *seja invertível. Então os autovalores são todos diferentes de zero. De* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, *temos que*

$$\mathbf{x} = A^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$$

e então

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}.$$

3- Mostre que se uma matriz real de dimensão n é positiva definida, então seus autovalores são positivos.

Solução: *Seja* $\mathbf{x}$ *autovetor correspondente ao autovalor* λ. *Se* A *é positiva definida, então*

$$\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

e $\lambda = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} / \mathbf{x}^T \mathbf{x} > 0$ *pois* $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$.

4- Ache os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Que propriedade dos autovetores você esperava encontrar, e é correta?

Solução: *Os autovalores são* -1, 0, *e* 2. *Os autovetores correspondentes são*

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Como A *é uma matriz hermitiana, temos que os autovetores são ortogonais, e que os autovalores são reais.*

5- Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, e dê um contra-exemplo caso elas sejam falsas:

a) *Toda matrix invertível pode ser diagonalizada.*
b) *Toda matrix diagonalizável pode ser invertida.*
c) *Permutando-se as linhas de uma matriz* 2×2, *os autovalores são os mesmos, mas com os sinais trocados.*
d) *Se, a dois autovalores distintos de uma matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *qualquer, temos associados dois autovetores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$, *então* $\mathbf{x}$ *é ortogonal a* $\mathbf{y}$.

Solução: *a) Falso. Contra-exemplo: tome*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é invertível mas não diagonalizável.

b)Falso. Como contra-exemplo tome

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem 1 *como autovalor de multiplicidade* 2*, mas os autovalores de*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

são -1 *e* 1*.*

d)Falso, pois os autovetores de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são múltiplos de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

com autovalores 1*,* 1 *e* 0*. Entretanto o autovetor correspondente ao autovalor* 0 *não é ortogonal a nenhum outro autovetor.*