ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **2 de maio de 2002**
Tempo de prova: **2 horas**

1- (1.5 pontos) Ache a inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução: Usando o processo de Gauss–Jordan temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo, a inversa é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2- (1.5 pontos) Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que se A *não* é invertível, então existe uma matriz B tal que $AB = 0$, mas $B \neq 0$.

Solução: Se A não é invertível, então existe vetor $\mathbf{x} \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = 0$. Tome então B como a matriz que tem como colunas o vetor $\mathbf{x}$.

3- (1.5 pontos) i) Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão finita que não seja o $\mathbb{R}^n$ ou o $\mathbb{C}^n$.

ii) Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão infinita.

iii) Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão finita que seja subspaço do ítem (ii) acima.

Solução: i) Tome os o espaço dos polinômios de grau n, com as operações usuais, i.e., se $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, e $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, então

$$p + q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad \alpha p = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i,$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Espaço dos polinômios de grau arbitrário, com as operações acima definidas.

iii) O espaço do ítem (i).

4- (1.5 pontos) Prove que os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes.

Solução: O dois vetores são linearmente dependentes se um é múltiplo do outro, i.e., se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Esse número obviamente não existe, logo $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são LI.

5- (1.5 pontos) Seja

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ bx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ bx_1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a representação matricial de T na base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, onde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2, \qquad T\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3v_1 + 4v_2.$$

Logo

$$[T] = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6- (1.5 pontos) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, com dim V=dim W, e seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Suponha que $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base de V. Mostre que $\{T\mathbf{x}_1, \cdots, T\mathbf{x}_n\}$ é uma base de W se e somente se T é invertível.

Solução: ($\Rightarrow$) Assuma $\{T\mathbf{x}_1, \cdots, T\mathbf{x}_n\}$ base de W. Suponha então que $T\mathbf{x} = 0$. Queremos mostrar que $\mathbf{x} = 0$. Usando que $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base de V, escrevemos

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

Logo,

$$0 = T\mathbf{x} = \alpha_1 T\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{x}_n.$$

Como $\{T\mathbf{x}_1, \cdots, T\mathbf{x}_n\}$ é base de W, então, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Logo $\mathbf{x} = 0$ e T é injetiva. Como dim W=dim V=dim $R(T)$ + dim $N(T)$ = dim $R(T)$, então T é sobrejetiva. Logo T é invertível.

($\Rightarrow$) Assuma agora que T é invertível. Queremos mostrar que $\{T\mathbf{x}_1, \cdots, T\mathbf{x}_n\}$ é uma base de V. Suponha

$$\alpha_1 T\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{x}_n = 0.$$

Então

$$T(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n) = 0,$$

e

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0,$$

pois $N(T) = \{0\}$. Como $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base de V, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Logo $\{T\mathbf{x}_1, \cdots, T\mathbf{x}_n\}$ é LI. Como esse conjunto tem n = dimV = dimW elementos, então ele é uma base de W.

7- (1.5 pontos) Mostre que um conjunto finito de vetores ortogonais de um certo espaço vetorial com produto interno é sempre linearmente independente.

Solução: Sejam $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k\}$ vetores ortogonais. Então, se

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k,$$

temos que $\alpha_i = < \mathbf{v}, \mathbf{x}_i > / \|\mathbf{x}_i\|^2$. Logo, se $\mathbf{v} = 0$, então $\alpha_i = 0$.

8- (questão bônus - 1.5 pontos) Seja V espaço vetorial de dimensão finita. Sejam $W_1, \cdots, W_k$ subespaços de V. Dizemos que $W_1, \cdots W_k$ são independentes se

$$\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = 0, \qquad \text{onde para } i = 1 \cdots k \text{ temos } \mathbf{x}_i \in W_i,$$

implica que cada $\mathbf{x}_i = 0$. Mostre que $W_1, \cdots, W_k$ são independentes se e somente se para cada j, onde $2 \leq j \leq k$, tem-se

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}.$$

Definição: A soma $W_1 + \cdots + W_k$ é o subespaço de V formado por todos os elementos $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k$, onde $\mathbf{x}_i \in W_i$.

Solução: ($\Rightarrow$) Assuma $W_1, \ldots, W_k$ independentes. Seja $\mathbf{x} \in W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1})$. Então $\mathbf{x} \in W_1 + \cdots + W_{j-1}$. Logo existem $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}$ tais que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{j-1}$ e $-\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{j-1} = 0$. Como $-\mathbf{x} \in W_j$ e $W_1, \ldots, W_k$ são independentes, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_{j-1} = 0$.

($\Leftarrow$) Assuma agora que $W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}$ para todo j e seja $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = 0$, onde $\mathbf{x}_i \in W_i$. Logo $\mathbf{x}_k = -(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{k-1}) \in W_1 + \cdots + W_{k-1}$. Como $\mathbf{x}_k \in W_k$, então $\mathbf{x}_k = 0$, pois $\mathbf{x}_k \in W_k \cap (W_1 + \cdots + W_{k-1})$. Logo $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{k-1} = 0$. Procedendo da mesma maneira, podemos provar que $\mathbf{x}_{k-1} = 0$, e assim por diante, até chegarmos a

$$\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_k = 0$$