ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **2 de maio de 2002**
Tempo de prova: **2 horas**

1- (1.5 pontos) Ache a inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2- (1.5 pontos) Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que se A *não* é invertível, então existe uma matriz B tal que $AB = 0$, mas $B \neq 0$.

3- (1.5 pontos) i) Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão finita que não seja o $\mathbb{R}^n$ ou o $\mathbb{C}^n$.

ii) Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão infinita.

iii) Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão finita que seja subspaço do ítem (ii) acima.

4- (1.5 pontos) Prove que os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes.

5- (1.5 pontos) Seja

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a representação matricial de T na base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, onde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6- (1.5 pontos) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, com dim V=dim W, e seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Suponha que $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base de V. Mostre que $\{T\mathbf{x}_1, \cdots, T\mathbf{x}_n\}$ é uma base de W se e somente se T é invertível.

7- (1.5 pontos) Mostre que um conjunto finito de vetores ortogonais de um certo espaço vetorial com produto interno é sempre linearmente independente.

8- (questão bônus - 1.5 pontos) Seja V espaço vetorial de dimensão finita. Sejam $W_1, \cdots, W_k$ subespaços de V. Dizemos que $W_1, \cdots W_k$ são independentes se

$$\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = 0, \qquad \text{onde para } i = 1 \cdots k \text{ temos } \mathbf{x}_i \in W_i,$$

implica que cada $\mathbf{x}_i = 0$. Mostre que $W_1, \cdots, W_k$ são independentes se e somente se para cada j, onde $2 \leq j \leq k$, tem-se

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}.$$

Definição: A soma $W_1 + \cdots + W_k$ é o subespaço de V formado por todos os elementos $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k$, onde $\mathbf{x}_i \in W_i$.