ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
LISTA III

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **3 de abril de 2002**

1- Seja T operador em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & -2x_1 + x_2 & -x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}^t$$

a)Qual é a representação matricial do operador T na base canônica?

b)Qual é a representação matricial do operador T na base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

2-Seja V espaço vetorial e $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ uma base de V. Seja T operador linear tal que

$$T\mathbf{v_j} = \mathbf{v_{j+1}}, \text{ para } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} - \mathbf{1} \qquad \text{e } \mathbf{Tv_n} = \mathbf{0}.$$

a)Qual a forma matricial de T na base acima?

b)Mostre que $T^n = 0$ mas $T^{n-1} \neq 0$.

3-Mostre que soma de dois produtos internos define um produto interno, i.e., se $< \cdot, \cdot >_A$ e $< \cdot, \cdot >_B$ são dois produtos internos dum espaço vetorial V, então a operação definida por

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} >_\mathbf{A} + < \mathbf{x}, \mathbf{y} >_\mathbf{B}$$

também é produto interno em V.

4-Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mostre que $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \mathbf{x} \cdot \mathbf{Ay}$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$ se e só se A é simétrica, $A_{1,1} > 0$, $A_{2,2} > 0$, e $\det A > 0$.

5-Mostre que se a norma $\|\cdot\|$ é definida através de um produto interno, então, vale a regra do *paralelograma*:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^\mathbf{2} + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\mathbf{2} = \mathbf{2}\|\mathbf{x}\|^\mathbf{2} + \mathbf{2}\|\mathbf{y}\|^\mathbf{2}.$$

6-Seja V espaço com produto interno e sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Mostre que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se e só se $< \mathbf{x}, \mathbf{z} >=< \mathbf{y}, \mathbf{z} >$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$.

7-Seja V espaço vetorial com produto interno e $\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ uma base *ortonormal* de V. Seja T operador linear em V e A sua representação matricial em relação à base acima. Mostre que $A_{i,j} =< T\mathbf{x_j}, \mathbf{x_i} >$.

8-Seja V o espaço das funções contínuas no intervalo $[-1,1]$, com o produto interno

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Seja W o subspaço das funções ímpares, i.e. $f \in W \to f(x) = -f(-x)$. Ache o complemento ortogonal de W.