ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
LISTA II

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **27 de março de 2002**

1- Seja V o espaço das matrizes 2×2. Ache uma base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ para V tal que $A_i^2 = A_i$.

2-Seja V um espaço vetorial. Suponha que exista um número finito de vetores $\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n}$ tais que $V = \text{span}\{\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n}\}$. Prove que V tem dimensão finita.

3-Prove que o espaço das matrizes $m \times n$ têm dimensão mn. Exiba uma base para esse espaço.

4-Descreva explicitamente uma transformação $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha como espaço coluna o espaço gerado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5-Seja V um espaço vetorial $n-$dimensional e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que o espaço coluna e o núcleo de T sejam o mesmo. Prove que n é par.

6-Prove que o espaço coluna de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um subspaço de $\mathbb{R}^m$.

7-Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Demonstre a seguinte afirmação:

O sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem uma única solução para todo* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ *se e somente se as colunas de* A *são LI. Então o posto de* $A = n$ *e existe uma matrix* B *tal que* $BA = I_n \in \mathbb{R}^n$ *(*I_n *é a matriz identidade em* $\mathbb{R}^n$*). Isso só ocorre se* $m \geq n$*.*

8-Prove que se T é uma transformação linear inversível, então sua inversa T^{-1} também é linear.

9-Seja $T : V \to W$ linear. Prove que T é não-singular se e somente se a imagem de todo conjunto LI também é LI.

Ps: uma transformação T *é não-singular se* $T(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*.*